

Einführung in die Künstliche Intelligenz

WS13/14 - Prof. Dr. J. Fürnkranz



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Beispiellösung für das 5. Übungsblatt (14.01.2014)

Aufgabe 1 Alltagswahrscheinlichkeiten

- a) Da es sich um eine ideale Münze handelt, ist jede mögliche Münzwurf-Sequenz gleich wahrscheinlich, und zwar $(0.5)^{10}$. Von allen möglichen 10-er Sequenzen existiert nur eine, in der zehnmal Kopf geworfen wird. Für das Ereignis 5-mal Kopf und 5-mal Zahl gibt es offensichtlich mehr als eine Möglichkeit und ist somit klar wahrscheinlicher. Alice wird die Wette gewinnen.
- b) Es ist hier zu beachten, dass die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Wurf Zahl fällt 0.5 ist. Das Ereignis wird weder wahrscheinlicher noch unwahrscheinlicher, wenn zuvor bereits 9-mal die Zahl geworfen wurde (siehe auch „Gambler’s fallacy“).
Aus a) wissen wir, dass Bob seinen Einsatz x sicher verlieren wird, falls er die zweite Wette verneint. Nimmt er die Wette an, verliert er zu 50% nichts und zu 50% verdoppelt sich der Verlust zu $2x$. Das bedeutet für den Erwartungswert $E_{Wette2}(Verlust) = x$. Da der Erwartungswert für beide Möglichkeiten identisch ist, sollte Bob indifferent bezüglich der Wahl sein (falls er *risikoneutral* ist).
In der Entscheidungstheorie gibt es für solche Fälle Konzepte, die Risikofreudigkeit als Parameter in den Entscheidungsprozess mit heranziehen. Falls Bob *risikoavers/risikoscheu* ist, d.h. eine geringere risikobehaftete Entscheidung präferiert (jedoch mit gleichem Erwartungswert) sollte er nicht auf die Zusatzwette eingehen.
- c) In diesem Fall würde Bob die Wette gewinnen, da sein verstandenes Ereignis wie bei der zehnfachen Kopf Sequenz exakt einmal unter allen möglichen Sequenzen vorkommt. Somit ist die Wahrscheinlichkeit beider Ereignisse gleich und keines wahrscheinlicher als das andere. Bezüglich der Zusatzwette ändert sich nur, dass die Erwartungswerte der Entscheidungen nun beide einen Gewinn anstatt einem Verlust von x entsprechen.

Aufgabe 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

- a) Wir zeigen $(1) \Leftrightarrow (2)$ und $(1) \Leftrightarrow (3)$.

- $(1) \Leftrightarrow (2)$

$$P(a, b|c) = P(a|c) \cdot P(b|c) \Leftrightarrow \frac{P(a, b, c)}{P(c)} = P(a|c) \cdot P(b|c) \Leftrightarrow \frac{P(a, b, c)}{P(b, c)} = P(a|c) \Leftrightarrow P(a|b, c) = P(a|c)$$

- $(1) \Leftrightarrow (3)$

$$P(a, b|c) = P(a|c) \cdot P(b|c) \Leftrightarrow \frac{P(a, b, c)}{P(c)} = P(a|c) \cdot P(b|c) \Leftrightarrow \frac{P(a, b, c)}{P(a, c)} = P(b|c) \Leftrightarrow P(b|a, c) = P(b|c)$$

- b) Bei (2) ist ausreichend Information vorhanden, um die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(e_1, e_2, h)$ zu rekonstruieren, z.B.

$$P(e_1, e_2, h) = P(e_1, e_2|h) \cdot P(h)$$

Dann gilt

$$P(h|e_1, e_2) = \frac{P(h, e_1, e_2)}{P(e_1, e_2)} = \frac{P(e_1, e_2|h) \cdot P(h)}{P(e_1, e_2)}$$

Für (1) kann ohne zusätzliche Annahmen die gemeinsame Verteilung aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten nicht rekonstruiert werden.

Im Vergleich zu (1) fehlt bei (3) noch $P(e_1, e_2)$, ist daher auch nicht möglich.

c) Hier kann man mittels

$$P(h, e_1, e_2) = P(e_1, e_2 | h) \cdot P(h) = P(e_1 | h) \cdot P(e_2 | h) \cdot P(h)$$

die gemeinsame Verteilung rekonstruieren (der letzte Schritt gilt \rightarrow Aufgabe a)), damit kann man aus den Angaben in (1) $P(h|e_1, e_2)$ bestimmen.

Es ist auch aus den Angaben in (3) möglich, da man durch Marginalisierung

$$P(e_1, e_2) = \sum_a P(h, e_1, e_2)$$

erhalten kann.

Aufgabe 3 Monty-Hall-Problem

Intuitiv:

In zwei von drei Fällen wird die erste Wahl auf ein Tor mit einer Niete gefallen sein. In diesen Fällen hat der Moderator die zweite Niete gezeigt, d.h. hinter dem dritten Tor ist sicher ein Gewinn. Im dritten Fall, in dem der Spieler zuerst den Gewinn besetzt hat, ist das verbleibende Tor eine Niete, und er verliert beim Wechsel. Die Entscheidung das andere Tor zu nehmen hat somit eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

Formal:

- 3 Tore: A, B, C ,
- je Möglichkeiten für jedes Tor, g (Gewinn), n (Niete)

Wir haben drei mögliche Ereignisse, die eine Wahrscheinlichkeit > 0 haben.

Ereignis	Tor A	Tor B	Tor C	$\Pr(e_i)$
e_A	g	n	n	$\frac{1}{3}$
e_B	n	g	n	$\frac{1}{3}$
e_C	n	n	g	$\frac{1}{3}$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß sich der Spieler für das Tor A entscheidet.

Weiters gibt es noch das Ereignis T , dass der Moderator ein Tor öffnet. Da sich der Spieler für A entschieden hat, kann der Moderator nur Tor B oder C öffnen, d.h. $\Pr(T = A) = 0$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Moderator eines der beiden anderen Tore öffnet, richtet sich nach den vorliegenden Ereignissen:

Ereignis	Tor A	Tor B	Tor C	$\Pr(T = B e_i)$	$\Pr(T = C e_i)$
e_A	g	n	n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e_B	n	g	n	0	1
e_C	n	n	g	1	0

Nehmen wir nun an, der Moderator öffnet Tür B. Was wir nun berechnen müssen, ist die Wahrscheinlichkeit, daß Ereignis e_A vorliegt, wenn wir wissen, dass B geöffnet wurde, also $\Pr(e_A|T = B)$.

$$\Pr(e_A|T = B) = \frac{\Pr(T = B|e_A) \cdot \Pr(e_A)}{\Pr(T = B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Analog wäre

$$\Pr(e_C|T = B) = \frac{\Pr(T = B|e_C) \cdot \Pr(e_C)}{\Pr(T = B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Der Kandidat sollte somit das andere Tor wählen.

Aufgabe 4 Bayes'sches Netz

a) Gesucht ist $P(W|\neg D, G)$.

$$\begin{aligned} P(W|\neg D, G) &= \frac{P(G, W, \neg D)}{P(G, \neg D)} \\ &= \frac{P(G, W, \neg D, L) + P(G, W, \neg D, \neg L)}{P(G, W, \neg D, L) + P(G, W, \neg D, \neg L) + P(G, \neg W, \neg D, L) + P(G, \neg W, \neg D, \neg L)} \\ &= \frac{0.1296}{0.1296 + 0.0512} \approx 0.7168 \end{aligned}$$

mit Benutzung von:

$$\begin{aligned} P(G, W, \neg D, L) + P(G, W, \neg D, \neg L) &= P(G|W)P(W|L, \neg D)P(L)P(\neg D) + P(G|W)P(W|\neg L, \neg D)P(\neg L)P(\neg D) \\ &= 0.0864 + 0.0432 = 0.1296 \\ P(G, \neg W, \neg D, L) + P(G, \neg W, \neg D, \neg L) &= P(G|\neg W)P(\neg W|L, \neg D)P(L)P(\neg D) + P(G|\neg W)P(\neg W|\neg L, \neg D)P(\neg L)P(\neg D) \\ &= 0.0288 + 0.0224 = 0.0512 \end{aligned}$$

b)

L	W	D	G	$P(L, W, D, G)$
T	T	T	T	0.2268 = $P(G W) \cdot P(W D, L) \cdot P(D) \cdot P(L)$
T	T	T	F	0.0252 = $P(\neg G W) \cdot P(W D, L) \cdot P(D) \cdot P(L)$
T	T	F	T	0.0864 = ...
T	T	F	F	0.0096
T	F	T	T	0.0216
T	F	T	F	0.0864
T	F	F	T	0.0288
T	F	F	F	0.1152
F	T	T	T	0.108
F	T	T	F	0.012
F	T	F	T	0.0432
F	T	F	F	0.0048
F	F	T	T	0.024
F	F	T	F	0.096
F	F	F	T	0.0224
F	F	F	F	0.0896

c) Gegebene Variablenreihenfolge : D, G, L, W .

1. Iteration: Variable D wird zum Netzwerk hinzugefügt. Da das Netzwerk bisher nur aus D besteht, findet keine Überprüfung nach möglichen Eltern statt.

2. Iteration: In der zweiten Iteration wird G hinzugefügt und überprüft, ob eine Kante von D nach G gelegt werden muss, also ob eine direkter Einfluß von D auf G vorliegt. Dazu wird überprüft, ob G unabhängig von D ist, d.h. ob $P(G|D) = P(G)$ gilt. Aus der Tabelle bestimmen wir mittels *Marginalization*

$$P(G) = 0.5612 \text{ und}$$

$$P(G|D) = 0.634.$$

Da G und D somit nicht unabhängig sind, kann D als Elternteil von G angesehen werden und es wird eine Kante von D nach G gelegt.

3. Iteration: Variable L wird zum Netzwerk hinzugefügt und es wird erneut ermittelt, welche Variablen als Elternteile in Frage kommen: $P(L|G, D) = P(L)$?

$$P(L|G, D) \approx 0.653$$

$$P(L) = 0.6$$

Da L nicht unabhängig von G, D ist, kann mindestens eins der beiden Variablen als Elternknoten benutzt werden.

$$P(L|G, D) = P(L|D)?$$

$$P(L|D) = 0.6 \neq P(L|G, D)$$

Die obige Überprüfung besagt, dass L von G gegeben D nicht unabhängig ist. Es wird eine Kante von G nach L

eingefügt. Es bleibt noch zu prüfen, ob auch L von D abhängig ist.

$$P(L|G, D) = P(L|G)?$$

$$P(L|G) \approx 0.648 \neq P(L|G, D)$$

Es muss also auch eine Kante von D nach L eingefügt werden.

4. Iteration: Als letzte Variable wird W zum Netzwerk hinzugefügt. Wir überprüfen erneut, von welchen Variablen W abhängig ist.

$$P(W|L, G, D) = P(W)?$$

$$P(W|L, G, D) \approx 0.913$$

$$P(W) = 0.516 \neq P(W|L, G, D)$$

$$P(W|L, G, D) = P(W|L)?$$

$$P(W|L) = 0.58 \neq P(W|L, G, D)$$

$$P(W|L, G, D) = P(W|G)?$$

$$P(W|G) \approx 0.826 \neq P(W|L, G, D)$$

$$P(W|L, G, D) = P(W|D)?$$

$$P(W|D) = 0.62 \neq P(W|L, G, D)$$

$$P(W|L, G, D) = P(W|L, G)?$$

$$P(W|L, G) \approx 0.861 \neq P(W|L, G, D)$$

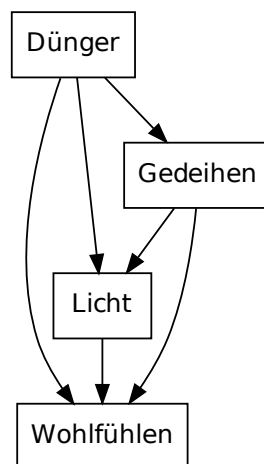
$$P(W|L, G, D) = P(W|L, D)?$$

$$P(W|L, D) = 0.7 \neq P(W|L, G, D)$$

$$P(W|L, G, D) = P(W|G, D)?$$

$$P(W|G, D) \approx 0.88 \neq P(W|L, G, D)$$

→ Von allen bisherigen Knoten im Netzwerk muss eine Kante nach W eingefügt werden. Das gelernte Bayes'sche Netz stellt den Worst-Case dar.



Aufgabe 5 Belief Functions

a) Berechnet werden muß $P(a)$. Wir zeigen einige, unterschiedlich effiziente Varianten:

1. *Streng nach Schema:* Berechnung über die gemeinsame Verteilung, Berücksichtigung der Netzwerkstruktur, Aufsummieren über alle unbekanntnen Variablen.

$$P(a) = \sum_{B,E,J,M} P(a, B, E, J, M) = \sum_{B,E,J,M} P(E) \cdot P(B) \cdot P(a|B, E) \cdot P(J|a) \cdot P(M|a)$$

Die Summe läuft über alle $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ Möglichkeiten, die Variablen B, E, J, M mit Werten zu belegen. Der Term ist also

$$P(e) \cdot P(b) \cdot P(a|b, e) \cdot P(j|a) \cdot P(m|a) = 0.002 \cdot 0.001 \cdot 0.95 \cdot 0.9 \cdot 0.7 = 0.000001197,$$

der letzte Term ist

$$P(\neg e) \cdot P(\neg b) \cdot P(a|\neg b, \neg e) \cdot P(\neg j|a) \cdot P(\neg m|a) = 0.998 \cdot 0.999 \cdot 0.001 \cdot 0.1 \cdot 0.3 = 0.00002991.$$

2. *Intelligent nach Schema*: Berechnung über die gemeinsame Verteilung, Berücksichtigung der Netzwerkstruktur, intelligente Berechnung der Summe über alle unbekanntenen Variablen.

Die oben stehende Summe lässt sich durch Herausheben von Termen auch umformen:

$$\begin{aligned} \sum_{B,E,J,M} P(E) \cdot P(B) \cdot P(a|B,E) \cdot P(J|a) \cdot P(M|a) &= \sum_J \sum_M \sum_B \sum_E P(E) \cdot P(B) \cdot P(a|B,E) \cdot P(J|a) \cdot P(M|a) \\ &= \left(\sum_J P(J|a) \right) \cdot \left(\sum_M P(M|a) \right) \cdot \sum_B \sum_E P(E) \cdot P(B) \cdot P(a|B,E) \end{aligned}$$

Es gilt natürlich $\sum_J P(J|a) = P(j|a) + P(\neg j|a) = 1$ und analog dazu $\sum_M P(M|a) = 1$.

Daraus ergibt sich

$$P(a) = \sum_B \sum_E P(E) \cdot P(B) \cdot P(a|B,E) \quad (1)$$

Zur Berechnung dieser Summe benötigt man nur mehr $2 \times 2 = 4$ Terme.

$$\begin{aligned} P(a) &= \sum_B \sum_E P(E) \cdot P(B) \cdot P(a|B,E) \\ &= P(e) \cdot P(b) \cdot P(a|b,e) + P(\neg e) \cdot P(b) \cdot P(a|b, \neg e) + P(e) \cdot P(\neg b) \cdot P(a|\neg b, e) + P(\neg e) \cdot P(\neg b) \cdot P(a|\neg b, \neg e) \\ &= 0.002 \cdot 0.001 \cdot 0.95 + 0.998 \cdot 0.001 \cdot 0.94 + 0.002 \cdot 0.999 \cdot 0.29 + 0.998 \cdot 0.999 \cdot 0.001 \\ &\approx 0.00252 \end{aligned}$$

Wie in der Vorlesung gezeigt, könnte man die Berechnung durch die Definition von Faktoren in der Praxis noch weiter optimieren.

3. *Mit Überlegen*: Auf die Gleichung (1) kann man auch sofort kommen, wenn man ein bißchen überlegt.

Es gilt natürlich

$$P(a, B, E) = P(a|B, E) \cdot P(B, E)$$

und da wir aus der Netzwerkstruktur ablesen können, daß B und E unabhängig sind, gilt

$$P(B, E) = P(B) \cdot P(E),$$

woraus (1) folgt.

- b) Zu berechnen ist nun $P(a|j) = \frac{P(a,j)}{P(j)}$. Zur Berechnung von

$$P(a, j) = \sum_{B,E,M} P(E) \cdot P(B) \cdot P(a|B, E) \cdot P(j|a) \cdot P(M|a)$$

würden wir $2 \times 2 \times 2 = 8$ Terme benötigen.

Aber natürlich gilt

$$P(a, j) = P(j|a) \cdot P(a)$$

Da wir $P(a)$ in a) berechnet haben, und $P(j|a)$ gegeben ist, können wir direkt berechnen

$$P(a, j) \approx 0.00252 \cdot 0.9 \approx 0.00227$$

Die noch fehlende Berechnung von $P(j)$ könnte analog zu a) passieren.

Natürlich gilt aber $P(j) = P(j, a) + P(j, \neg a)$, sodaß man anstatt $P(j)$ auch $P(j, \neg a)$ berechnen kann, und dann $P(a|j)$ als

$$P(a|j) = \frac{P(a, j)}{P(j)} = \frac{P(a, j)}{P(a, j) + P(\neg a, j)}$$

berechnet.

$P(\neg a, j)$ können wir aber wieder einfach berechnen als

$$\begin{aligned} P(\neg a, j) &= P(j|\neg a) \cdot P(\neg a) = P(j|\neg a) \cdot (1 - P(a)) \\ &\approx 0.05 \cdot (1 - 0.00252) = 0.05 \cdot 0.99748 \approx 0.04987 \end{aligned}$$

Nun ergibt sich

$$P(a|j) = \frac{P(a, j)}{P(j)} = \frac{P(a, j)}{P(j, a) + P(j, \neg a)} \approx \frac{0.00227}{0.00227 + 0.04987} \approx 0.04353$$

Durch die zusätzliche Evidenz, daß John angerufen hat, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Alarm losgegangen ist, ungefähr 17-mal so hoch als ohne diese Evidenz.

Anmerkung 1:

Unsere Ableitung zu Beginn entspricht einfach der Anwendung des Bayes'schen Satzes

$$P(a|j) = \frac{P(j|a) \cdot P(a)}{P(j)}$$

Dieser Satz ist oft nützlich um eine unbekannte konditionale Wahrscheinlichkeit ($P(a|j)$) auf eine bekannte ($P(j|a)$) zurückzuführen.

Anmerkung 2:

Durch die Ersetzung $P(j) = P(j, a) + P(j, \neg a)$ sieht man, daß die Verteilung $\mathbf{P}(A|j)$ proportional zu $\mathbf{P}(A, j)$ ist, oder (siehe Vorlesung Uncertainty, Folie 22) anders ausgedrückt

$$\mathbf{P}(A|j) = \alpha \cdot \mathbf{P}(A, j)$$

Für die Praxis heißt das, daß es oft einfacher ist, den Nenner im Bayes'schen Satz nicht direkt zu berechnen, sondern als Summe des Zählers und seines "Gegenteils" darzustellen.

c) Nun müssen wir $P(a|j, e)$ berechnen.

Die gemeinsame Verteilung läßt sich schon recht schnell nach Schema analog zu a) berechnen:

$$\begin{aligned} P(a, j, e) &= \sum_M \sum_B P(e) \cdot P(B) \cdot P(a|B, e) \cdot P(j|a) \cdot P(M|a) \\ &= P(j|a) \cdot P(e) \cdot \left(\sum_M P(M|a) \right) \sum_B P(B) \cdot P(a|B, e) \\ &= P(j|a) \cdot P(e) \cdot 1 \cdot \sum_B P(B) \cdot P(a|B, e) \\ &= P(j|a) \cdot P(e) \cdot (P(b) \cdot P(a|b, e) + P(\neg b) \cdot P(a|\neg b, e)) \\ &= 0.9 \cdot 0.002 \cdot (0.001 \cdot 0.95 + 0.999 \cdot 0.29) \\ &= 0.0018 \cdot (0.00095 + 0.28971) \approx 0.000523 \end{aligned}$$

Analog zu b) brauchen wir nun entweder $P(j, e)$ oder $P(\neg a, j, e)$. Wir nehmen letztes und berechnen wie oben

$$\begin{aligned}
P(\neg a, j, e) &= P(j|\neg a) \cdot P(e) \cdot (P(b) \cdot P(\neg a|b, e) + P(\neg b) \cdot P(\neg a|\neg b, e)) \\
&= 0.05 \cdot 0.002 \cdot (0.001 \cdot 0.05 + 0.999 \cdot 0.61) \\
&= 0.0001 \cdot (0.00005 + 0.60939) \approx 0.000061
\end{aligned}$$

Wir erhalten nun

$$P(a|j, e) = \frac{P(a, j, e)}{P(a, j, e) + P(\neg a, j, e)} \approx \frac{0.000523}{0.000523 + 0.000061} \approx 0.8955$$

Wenn wir wissen, daß John angerufen hat und ein Erdbeben war, können wir also zu fast 90% sicher sein, daß der Alarm losgegangen ist.

Zum Vergleich: Wenn wir nur wüssten, daß ein Erdbeben war (ohne den Anruf von John) ist die Wahrscheinlichkeit, daß dabei ein Erdbeben losgegangen ist nur bei ca. 0.29:

$$P(a|e) = P(a|e, b) \cdot P(b) + P(a|e, \neg b) \cdot P(\neg b) = 0.95 \cdot 0.001 + 0.29 \cdot .999 \approx 0.29$$

d) Nachdem wir nun erfahren, daß Mary nicht angerufen hat, müssen wir $P(a|e, j, \neg m)$ berechnen.

Man könnte nun $P(a, j, e, \neg m)$ und $P(\neg a, j, e, \neg m)$ analog zu c) berechnen (geht sogar noch schneller), mit etwas Überlegung kann man aber noch einfacher zum Ziel gelangen. Klarerweise gilt:

$$P(a, j, e, \neg m) = P(\neg m|a, j, e) \cdot P(a, j, e) \quad (2)$$

Nachdem in jedem Bayes'schen Netz gilt, daß die Belief Function in einem Knoten nur von seiner Markov-Decke (also den Eltern, den Kindern, und den anderen Eltern der Kinder) abhängt, und die Markov-Decke für M nur aus dem Knoten A besteht, gilt:

$$P(\neg m|a, j, e) = P(\neg m|a)$$

und (2) wird dann zu

$$P(a, j, e, \neg m) = P(\neg m|a) \cdot P(a, j, e) = 0.3 \cdot 0.000523 \approx 0.000157 \quad (3)$$

da wir ja $P(a, j, e) = 0.000523$ schon in c) berechnet haben.

Im letzten Schritt konnten wir einfach dein Teilergebnis von Aufgabe c) wiederverwenden (siehe auch Anmerkung unten).

Analog erhalten wir

$$P(\neg a, j, e, \neg m) = P(\neg m|\neg a) \cdot P(\neg a, j, e) = 0.99 \cdot 0.000061 = 0.000060 \quad (4)$$

und

$$P(a|j, e, \neg m) = \frac{P(a, j, e, \neg m)}{P(a, j, e, \neg m) + P(\neg a, j, e, \neg m)} = \frac{0.000157}{0.000157 + 0.000060} \approx 0.7235$$

Die Tatsache, daß Mary nicht angerufen hat, führt also wieder zu einer leichten Beruhigung, die Wahrscheinlichkeit, daß der Alarm losgegangen ist, ist aber immer noch recht hoch.