Einführung in die
Künstliche Intelligenz
SoSe 19

Prof. Dr. J. Fürnkranz, Prof. Dr. K. Kersting

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übungsblatt

Aufgabe 1 Alltagswahrscheinlichkeiten

a) Alice wettet mit Bob, dass es wahrscheinlicher sei bei zehn Münzwürfen (mit einer fairen/idealen Münze) fünf mal Kopf und fünf mal Zahl zu werfen, als zehnmal Kopf.
Wer wird die Wette gewinnen?

b) Die beiden beschließen die Wette zu klären und führen mehrere 10-er Münzwurfsequenzen durch, um daraus die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu approximieren. Dabei passiert in einer bestimten Sequenz folgendes: Es wurde bereits neunmal Zahl geworfen. Alice bietet Bob eine Zusatzwette an: „Falls der nächste Wurf wieder Zahl ist, wird unsere erste Wette annuliert. Fällt Kopf, verdoppeln wir den Einsatz auf die erste Wette.“.
Wie sollte sich Bob entscheiden?

c) Bob entscheidet sich gegen die Zusatzwette und sie führen die Auswertung weiter fort. Schließlich gewinnt Alice, worauf Bob nicht einsieht die Wette zu begleichen, da er angeblich Alices ursprüngliche Wettbehauptung missverstanden hätte als: „fünf mal Kopf und fünf mal Zahl *in dieser Reihenfolge*“.
Wenn dies so wäre, ist seine Entscheidung auf die erste Wette einzugehen nachvollziehbar?
Wie lautet Ihre Empfehlung an Bob bei dieser Variante der Wette bezüglich der Zusatzwette aus b)?

Aufgabe 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

a) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
   1. $P(a,b|c) = P(a|c) \cdot P(b|c)$
   2. $P(a|b,c) = P(a|c)$
   3. $P(b|a,c) = P(b|c)$

b) Welche der folgenden Informationen sind ausreichend, um $P(h|e_1,e_2)$ zu bestimmen?
H, E_1 und E_2 seien diskrete Zufallsvariablen mit $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2$ und $h \in H$.
   1. $\mathbf{P}(E_1,E_2), \mathbf{P}(H), \mathbf{P}(E_1|H), \mathbf{P}(E_2|H)$
   2. $\mathbf{P}(E_1,E_2), \mathbf{P}(H), \mathbf{P}(E_1,E_2|H)$
   3. $\mathbf{P}(E_1|H,E_2), \mathbf{P}(E_1), \mathbf{P}(E_2|H), P(H|E_1)$

c) Nehmen Sie nun an, dass $\mathbf{P}(E_1|H,E_2) = \mathbf{P}(E_1|H)$ gilt. Wie sieht nun die Antwort für b) aus?

Aufgabe 3 Monty-Hall-Problem (Ziegenproblem)

Bei einer Spielshow soll der Kandidat eines von drei aufgebauten Toren auswählen. Hinter einem verbirgt sich der Gewinn, ein Auto, hinter den anderen beiden jeweils eine Niete, eine Ziege. Die Position des Autos wird vor Beginn des Spiels zufällig gleichverteilt gezogen. Folgender Spielablauf ist immer gleich und den Kandidaten vorab bekannt:

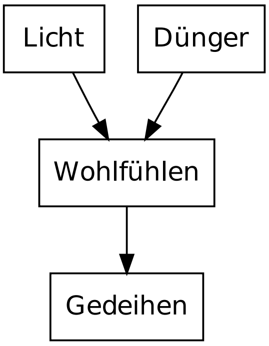
- Der Kandidat wählt ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt.
- Daraufhin öffnet der Show-Master Monty Hall, der die Position des Gewinns kennt, eines der beiden nicht vom Kandidaten ausgewählten Tore, und zeigt, dass sich dahinter kein Gewinn verbirgt. Im Spiel befinden sich also noch ein Gewinn und eine Niete.

- Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere Tor zu wählen.

Wie soll der Kandidat sich entscheiden, um seine Gewinnchance zu maximieren? Hat seine Entscheidung überhaupt einen Einfluss auf seine Gewinnchancen?

Aufgabe 4 Bayes'sches Netz

Folgendes Bayes'sche Netz repräsentiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung, von welchen nach Alice's Meinung das Gedeihen von Planzen abhängt.



Die zugehörigen Wahrscheinlichkeitswerte sind:

$P(\text{Licht})$	$= 0.6$	$= P(L)$
$P(\text{Dünger})$	$= 0.6$	$= P(D)$
$P(\text{Wohlfühlen} \mid \text{Licht} \wedge \text{Dünger})$	$= 0.7$	$= P(W \mid L \wedge D)$
$P(\text{Wohlfühlen} \mid \neg\text{Licht} \wedge \text{Dünger})$	$= 0.5$	$= P(W \mid \neg L \wedge D)$
$P(\text{Wohlfühlen} \mid \text{Licht} \wedge \neg\text{Dünger})$	$= 0.4$	$= P(W \mid L \wedge \neg D)$
$P(\text{Wohlfühlen} \mid \neg\text{Licht} \wedge \neg\text{Dünger})$	$= 0.3$	$= P(W \mid \neg L \wedge \neg D)$
$P(\text{Gedeihen} \mid \text{Wohlfühlen})$	$= 0.9$	$= P(G \mid W)$
$P(\text{Gedeihen} \mid \neg\text{Wohlfühlen})$	$= 0.2$	$= P(G \mid \neg W)$

a) Wie ergibt sich die Verbundwahrscheinlichkeitstabelle $\mathbf{P}(L, W, D, G)$ aus den angegebenen Werten?

b) Wie wahrscheinlich ist es nach Alice's Meinung, dass Bobs Pflanze sich wohlgefühlt hat, wenn sie erfährt, dass die Pflanze kein Dünger hatte, sie aber trotzdem gediehen ist ?

c) Welche bedingten Unabhängigkeiten sind in der Struktur des Netzes kodiert?

Aufgabe 5 Inferenz in BNs

Gegeben sei das Alarm-Netzwerk aus den Vorlesungsfolien ("Bayesian Networks", Folie 5). Wir möchten untersuchen, wie sich unsere Einschätzung, ob der Alarm losgeht, bei verschiedenen Beobachtungen verändert. Formal betrachten wir dazu die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A = True|E)$, für verschiedene Evidenzmengen E (*belief function*).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Alarm losgeht, wenn nichts weiter bekannt ist?

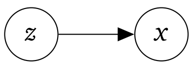
b) Sie erfahren nun, daß John angerufen hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nun?

c) Aus den Nachrichten erfahren Sie nun, daß ein Erdbeben stattgefunden hat. Wie ist die Wahrscheinlichkeit für einen Alarm?

d) Sie fragen nun nach, ob auch Mary angerufen hat, was nicht der Fall ist. Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit nun?

Aufgabe 6 Density Networks

Betrachten sie folgendes Bayes'sches Netz über kontinuierliche Variablen $z_1, ..., z_n$ und binäre Variablen $x_1, ..., x_m$.



Die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen seien wie folgt gegeben:

$$z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$$
$$p(x_i = True \mid z) = f_i(z)$$

Hierbei sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]^m$ durch ein neuronales Netz repräsentiert.
Welche Methoden kennen Sie, die in der Lage sein könnten, in diesem Modell Inferenz durchzuführen, also den Posterior $p(z|x)$ zu bestimmen oder zu approximieren? Wozu könnte ein solches Modell eingesetzt werden? Kennen Sie Arbeiten aus dem tiefen Lernen, die solche oder ähnliche Modelle verwenden?